Monotonie (crescatoare sau descrescatoare) si convexitate.

1. Fie $f(x): R \to R,\ \ f(x) = x^3 - 3x + 1$

a) Calculati $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2}$

b) Ecuatia tangentei la graficul lui f, in punctul $x_0 = 1$

c) Aratati ca f este descrescatoare, pe intervalul (-1, 1)

d) Aratati ca $f(x) \geq -1, \forall x > -1$

e) Aratati ca f (2009) > f (2007)

f) Studiati convexitatea functiei.

a) Din definitia derivatei, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$. Deci noi avem de calculat $f'(2)$. Mai intai derivam, apoi

inlocuim x cu 2 :

$f(x) = x^3 - 3x + 1 \ \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3$

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 3 = 9$

b) Formula pentru ecuatia tangentei la graficul functiei f(x) : $y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

Noi avem $x_0 = 1$, deci tangenta : $y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1) \ \Rightarrow \ y - (-1) = 0 \cdot (x - 1) \ \Rightarrow \ y + 1 = 0$

c) Pentru a studia monotonia, adica daca o functie este crescatoare sau descrescatoare, mai intai derivam, apoi

rezolvam ecuatia $f' = 0$, aflam solutia, apoi facem tabel de semn pt f'. Avem :

$f'(x) = 3x^2 - 3$

$f' = 0 \ \Rightarrow \ 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow \ 3x^2 = 3 \ \Rightarrow \ x^2 = 1 \Rightarrow \ x = \pm 1$ (este ecuatie de gradul 2 , se poate rezolva si cu delta).

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+ + + + + +	0	- - - - - - - -	0	+ + + + + +	
$f(x)$		↗	3	↘	-1	↗	

Interpretarea tabelului :

- pe linia lui X, punem cele 2 valori obtinute la $f' = 0$

- pe linia lui f', punem semnul pe care il ia $f'(x) = 3x^2 - 3$ (luam o valoare la intamplare intre

(-∞, -1) , de ex -3. cand inlocuim in $f'(x) = 3x^2 - 3$, obtinem 24, deci + . intre (-1,1) putem lua 0 si obtinem inlocuind in $f'(x) = 3x^2 - 3$, -3 , deci - . Iar intre (1,+ ∞) , putem lua 2 si obtinem 9, deci + .)

- pe linia lui f, sageata in sus inseamna ca f este crescatoare, iar in jos, ca e descrescatoare.

Observam ca am terminat punctul c) .

d) Din tabelul de mai sus, pe care l-am mai copiat o data, observam ca 3 este Maximul pe care functia il ia pe $(-\infty, 1)$ iar -1 este Minimul pe care il ia functia, pe (-1, $+\infty$) ----- functia scade pana la -1, apoi creste, deci nu il depaseste pe -1, in intervalul (-1, $+\infty$).

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+ + + + + +	0	- - - - - - - -	0	+ + + + + +	
$f(x)$		↗	3	↘	-1	↗	

Noi trebuie sa aratam ca $f(x) \geq -1, \forall x > -1$.

Rezolvarea : din tabel,observam ca – 1 este Minim pentru orice $x > -1$, deci $f(x) \geq -1, \forall x > -1$

e) functia este crescatoare pe $(1, \infty)$.

Cum 2009 > 2007, rezulta ca si $f(2009) > f(2007)$

Obs – se pastreaza semnul, pentru ca functia este crescatoare. Daca era descrescatoare, schimbam semnul intre ele, deci as fi obtinut ca $f(2009) < f(2007)$

f) Pentru a studia convexitatea sau concavitatea unei functii, derivam de doua ori, rezolvam ecuatia $f'' = 0$ si facem tabel de semn.

$f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow f'' = 6x$

$f'' = 0 \Rightarrow 6x = 0 \Rightarrow x = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	- - - - - - -	0	+ + + + + +
$f(x)$		f(0)=1	
	Concava		convexa

Problema 2) 1. Fie $f(x): R \to R,\ f(x) = (x-2) \cdot e^x$

a) Calculati $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$

b) Ecuatia tangentei la graficul lui f, in punctul $x_0 = 1$

c) Aratati ca f este descrescatoare, pe intervalul $(-\infty, 1)$

d) Aratati ca $f(x) \geq -e, \forall x \in R$

e) Studiati convexitatea functiei.

a) Calculam $f'(x) = (x-2)' \cdot e^x + (x-2) \cdot (e^x)' = 1 \cdot e^x + (x-2) \cdot e^x = (x-1) \cdot e^x$

Atunci $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = (0-1) \cdot e^0 = -1 \cdot 1 = -1$

b) avem $x_0 = 1$, deci tangenta : $y - f(1) = f'(1) \cdot (x-1) \;\Rightarrow\; y - (-e) = 0 \cdot (x-1) \;\Rightarrow\; y + e = 0$

c) Pentru a studia monotonia, adica daca o functie este crescatoare sau descrescatoare, mai intai derivam, apoi rezolvam ecuatia $f' = 0$, aflam solutia, apoi facem tabel de semn pt f'. Avem :

$f'(x) = (x-1) \cdot e^x$

$f' = 0 \;\Rightarrow\; (x-1) = 0 \Rightarrow x = 1$. De observat e ca e^x nu poate face 0, indiferent cat e X .

x	$-\infty$ 1 $+\infty$
$f'(x)$	- - - - - - - - 0 + + + + + +
$f(x)$	↘ f(1)= - e ↗

d) observam din tabel ca ‘ – e ‘ este Minim, deci $f(x) \geq -e, \forall x \in R$

e) Pentru a studia convexitatea sau concavitatea unei functii, derivam de doua ori, rezolvam ecuatia $f'' = 0$ si facem tabel de semn.

$f'(x) = (x-1) \cdot e^x \;\Rightarrow\; f'' = (x-1)' \cdot e^x + (x-1) \cdot \left(e^x\right)' = 1 \cdot e^x + (x-1) \cdot e^x = x \cdot e^x$

$f'' = 0 \Rightarrow x \cdot e^x = 0 \Rightarrow x = 0$

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$f''(x)$	- - - - - - - 0 + + + + + +
$f(x)$	f(0)= -2

Concava convexa

Problema 3) 1. Fie $f(x):(0,\infty)\to R,\ \ f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

a) Calculati $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

b) Ecuatia tangentei la graficul lui f, in punctul $x_0=e$

c) Aratati ca f este crescatoare, pe intervalul (0, e)

d) Aratati ca $f(x)\le\dfrac{1}{e},\forall x>0$

e) Studiati convexitatea functiei.

Obs. $\ln e=1;\ln 1=0;\ \ \ln e^x=x$

a) Calculam $f'(x)=\dfrac{(\ln x)'\cdot x-\ln x\cdot(x)'}{x^2}=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x\cdot 1}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

Atunci $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=\dfrac{1-\ln 1}{1^2}=\dfrac{1-0}{1}=1$

b) avem $x_0=e$, deci tangenta : $y-f(e)=f'(e)\cdot(x-e)\ \Rightarrow\ y-\dfrac{\ln e}{e}=\dfrac{1-\ln e}{e^2}\cdot(x-e)\ \Rightarrow$

$y-\dfrac{1}{e}=\dfrac{1-1}{e^2}\cdot(x-e)\Rightarrow y-\dfrac{1}{e}=0$

c) Pentru a studia monotonia, adica daca o functie este crescatoare sau descrescatoare, mai intai derivam, apoi

rezolvam ecuatia $f'=0$, aflam solutia, apoi facem tabel de semn pt f'. Avem :

$f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

$f'=0\ \Rightarrow\ 1-\ln x=0\Rightarrow \ln x=1\Rightarrow\ x=e$.

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	+ + + + + + +	0	- - - - - - - - - - -
$f(x)$	↗	f(e)= $\frac{1}{e}$	↘

d) observam din tabel ca ‘ $\frac{1}{e}$ ‘ este Maxim, deci $f(x) \le \frac{1}{e}, \forall x > 0$

e) Pentru a studia convexitatea sau concavitatea unei functii, derivam de doua ori, rezolvam ecuatia $f'' = 0$

si facem tabel de semn.

$$f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} \Rightarrow f'' = \frac{(1-\ln x)' \cdot x^2 - (1-\ln x)\cdot(x^2)'}{(x^2)^2} = \frac{\frac{1}{x}\cdot x^2 - (1-\ln x)\cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{x-(1-\ln x)\cdot 2x}{x^4} =$$

$$\frac{x-2x+2x\ln x}{x^4} = \frac{1-2+2\ln x}{x^3} = \frac{2\ln x - 1}{x^3}$$

$$f'' = 0 \Rightarrow 2\ln x - 1 = 0 \Rightarrow \ln x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

x	0	$\sqrt{e}$	$+\infty$
$f''(x)$	- - - - - - -	0	+ + + + + +
$f(x)$		f($\sqrt{e}$)	
	Concava		convexa